

3ª LISTA DE MECÂNICA QUÂNTICA I - PG
(2014-1)

1. Seja $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ uma base para o espaço de estados de polarização de um fóton, onde $|H\rangle$ ($|V\rangle$) representa um estado de polarização linear orientada na direção horizontal (vertical). Podemos definir os estados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de polarização linear rodados de $\pm 45^\circ$ e os estados $\{|E\rangle, |D\rangle\}$ de polarização circular à esquerda e à direita como

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{|H\rangle + |V\rangle}{\sqrt{2}}, & |E\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle), \\ |-\rangle &= \frac{|H\rangle - |V\rangle}{\sqrt{2}}, & |D\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle). \end{aligned}$$

Considere os operadores

$$P_1 = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V|, \quad P_2 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|, \quad P_3 = |E\rangle\langle E| - |D\rangle\langle D|.$$

- (a) Dado um estado arbitrário representado pela matriz densidade ρ , determine $\langle P_j \rangle$ em função dos elementos da matriz densidade na base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$.
 - (b) Mostre que os elementos de ρ podem ser determinados a partir destes valores esperados. Este processo é chamado de tomografia de estado.
 - (c) Determine a pureza do estado de polarização em termos de $\langle P_j \rangle$.
2. Considere o traço de uma matriz M definido por $\text{Tr}[M] \equiv \sum_j M_{jj}$.
- (a) Mostre que $\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB] = \text{Tr}[BCA]$.
 - (b) Mostre que o traço de um operador é invariante por transformações unitárias.
 - (c) Utilize o resultado do item anterior e mostre que o traço de uma matriz é igual à soma dos seus autovalores.
 - (d) Utilize os resultados dos itens anteriores e mostre que $\det[e^M] = e^{\text{Tr}[M]}$.
3. Considere um sistema composto por uma partícula de spin $j_1 = 1/2$ e outra de spin $j_2 = 3/2$.
- (a) Construa a base de autovetores de $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z\}$ em função dos autovetores de $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$.
 - (b) Suponha que o sistema seja inicialmente preparado no estado $|J = 1; M = 0\rangle$. Que valores podemos obter em uma medida de J_{2z} e com que probabilidades.
4. Considere duas partículas com momentos angulares j_1 e j_2 . As partículas interagem segundo um hamiltoniano dado por

$$H_0 = \lambda \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2.$$

- (a) Escreva o hamiltoniano em termos de $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2$ e do momento angular total das duas partículas.
- (b) Determine os estados estacionários e suas energias correspondentes.
- (c) Mostre que H_0 é um operador escalar.
- (d) Suponha que as partículas sejam colocadas na presença de um campo magnético $\mathbf{B} = B \hat{z}$. A energia total das partículas é agora dada por

$$H = \lambda \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + g \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2).$$

O hamiltoniano H é um operador escalar? Justifique.

- (e) Encontre os autovetores e os autovalores de H .
- (f) Suponha agora que a direção do campo magnético seja alterada para $\mathbf{B} = B(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})/\sqrt{3}$. Encontre os autovetores e autovalores de H supondo $j_1 = j_2 = 1/2$. **Sugestão:** Determine os ângulos de Euler associados a esta rotação.